Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Nama : ....
NIM : ....
T.tangan: ....

Solusi Kuis ke-1 IF2120 Matematika Diskrit (3 SKS) -Himpunan, Induksi Matematika, Rekursi dan Relasi Rekurens
Dosen: Rinaldi Munir, Harlili
Senin, 16 September 2013
Waktu: 55 menit

---

1. Misalkan *A* dan *B* adalah sebuah himpunan. Buktikan dengan hukum-hukum himpunan $(A \cap B) \cup \overline{(A \cup \bar{B})} = B$, jangan lupa menyebutkan hukum yang dipakai. **(15)**

Jawaban:

$(A \cap B) \cup \overline{(A \cup \bar{B})}$	=	$(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \overline{(\bar{B})})$	(Hukum De Morgan)
	=	$(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$	(Hukum Involusi)
	=	$(B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$	(Hukum Komutatif x2)
	=	$B \cap (A \cup \bar{A})$	(Hukum Distributif)
	=	$B \cap U$	(Hukum Komplemen)
	=	B	(Hukum Identitas)

2. Diketahui dua himpunan A = {1,1,2,3,4,4,4,5} dan B = {1,2,4,5,5,6}. Tentukan:
   a. $A \cup B$; b. $A \cap B$ c. $A - B$ d. $B - A$. e. $A + B$ **(20)**

Jawaban: Ini adalah kasus untuk himpunan ganda (multiset)

a. A ∪ B = {1,1,2,3,4,4,4,5,5,6}
b. A ∩ B = {1,2,4,5}
c. A – B = {1,3,4,4}
d. B – A = {5,6}
e. A + B = {1,1,1,2,2,3,4,4,4,4,5,5,5,6}

3. Barisan Lucas (*Lucas Sequence*) adalah barisan di mana suku ke-*n* adalah jumlah dari kedua suku sebelumnya. Berikut adalah salah satu contoh barisan Lucas dengan suku pertama dan suku kedua adalah berturut-turut 1 dan 3.
   Barisan Lucas: 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, . . .
   Misal a_n adalah suku ke- *n* dari barisan Lucas di atas. Buktikan dengan induksi matematika bahwa pertidaksamaan $a_n < (7/4)^n$ valid untik semua *n* bilangan bulat positif! **(15)**

Jawaban:

Untuk membuktikan pernyataan ini akan digunakan prinsip induksi kuat.

Pertama, untuk n = 1 dan 2

$$a_1 = 1 < (7/4)^1 \quad \text{dan} \quad a_2 = 3 < (7/4)^2 = 49/16$$

Kedua suku diatas memenuhi pertidaksamaan tadi. Selanjutnya akan dilakukan langkah induksi.

Pilih bilangan bulat k >= 3. Asumsi pertidaksamaan tadi valid untuk n = 1, 2, . . . , k-1. Maka

$$a_{k-1} < (7/4)^{k-1} \quad \text{dan} \quad a_{k-2} < (7/4)^{k-2}$$

Selanjutnya dengan menggunakan definisi barisan Lucas

$a_k = a_{k-1} + a_{k-2} \quad < (7/4)^{k-1} + (7/4)^{k-2}$

$= (7/4)^{k-2}(7/4 + 1)$

$= (7/4)^{k-2}(11/4)$

$< (7/4)^{k-2}(7/4)^2 = (7/4)^k$

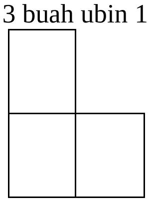
Maka pertidaksamaan tadi terbukti berlaku untuk k.

Sehingga pertidaksamaan tadi memenuhi kedua syarat induksi kuat, yaitu :

a. Valid untuk n = 1 dan 2
b. Jika n = 1, 2, . . . , k-1 valid, maka n = k juga valid

Maka menurut prinsip induksi kuat, pertidaksamaan tadi valid untuk semua n bilangan bulat positif.

4. Buktikan bahwa setiap lantai berukuran $2^n \times 2^n$ (n bilangan asli) dapat ditutupi dengan satu ubin berukuran 1×1 dan beberapa ubin berbentuk L-tromino. (ubin L-tromino disusun oleh 3 buah ubin 1×1, lihat gambar dibawah) **(20)**



Jawaban:

Basis: Untuk n=1, tutup salah satu pojok dengan ubin 1×1 dan jelas petak yang tersisa merupakan L-tromino

Induksi: Misalkan benar bahwa lantai berukuran $2^n \times 2^n$ dapat ditutupi dengan satu ubin berukuran 1×1 dan sejumlah ubin berbentuk L-tromino. Untuk n=k+1, maka lantai berukuran $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ akan tersusun oleh 4 bagian lantai berukuran $2^k \times 2^k$. Jika ubin 1×1 ditutup di salah satu bagian lantai, bagian tersebut dapat ditutup sejumlah L-tromino. Lalu, terhadap ketiga bagian lainnya, buang pojok bagian yang terdapat di tengah lantai besar. Kini, ketiga bagian tersebut dapat ditutupi sejumlah L-tromino dan ketiga pojok yang dibuang pun sebenarnya membentuk L-tromino. Karena lantai berukuran $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ juga ternyata bisa ditutupi sejumlah L-tromino dan satu ubin 1×1 maka pernyataan pada soal benar dan terbukti oleh induksi matematika.

5. Misalkan *F adalah* fungsi sedemikian sehingga $F(n)$ adalah jumlah dari n integer positif pertama. Berikan definisi rekursif dari $F(n)$. **(15)**

Jawaban:

F(n) = 1 + 2 + 3 + … + (n – 1) + n
= {1 + 2 + 3 + … + (n – 1) } + n
= F(n – 1) + n

Fungsi rekursif:

$$F(n) = \begin{cases} 1 & , n = 1 \\ F(n-1) + n & , n > 1 \end{cases}$$

6. Selesaikan relasi rekurens berikut: $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$; $a_0 = 3$ dan $a_1 = 6$ **(15)**

Jawaban:

Persamaan karakteristik: $r^2 - r - 6 = 0$.

Akar-akarnya: $(r - 3)(r + 2) = 0 \rightarrow r_1 = 3$ dan $r_2 = -2$

$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \rightarrow a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2(-2)^n$

$a_0 = 3 \rightarrow a_0 = 3 = \alpha_1 3^0 + \alpha_2(-2)^0 = \alpha_1 + \alpha_2$

$a_1 = 6 \rightarrow a_1 = 6 = \alpha_1 3^1 + \alpha_2(-2)^1 = 3\alpha_1 - 2\alpha_2$

Diperoleh dua persamaan: $\alpha_1 + \alpha_2 = 3$ dan $3\alpha_1 - 2\alpha_2 = 6$,

solusinya adalah $\alpha_1 = 12/5 = 2.4$ dan $\alpha_2 = 3/5 = 0.6$

Jadi, solusi relasi rekurens adalah:

$a_n = (2.4)\cdot 3^n + (0.6)(-2)^n$

Jawaban setiap soal ditulis di bawah ini. Gunakan halaman dibalik atau kertas tambahan jika diperlukan.